滑らかな群作用の剛性と変形

浅岡 正幸 (京都大学大学院 理学研究科)

1 群作用の局所剛性問題

Γ を有限生成離散群，M を多様体とする．M 上の C^∞ 級微分同相写像全体のなす群を $\mathrm{Diff}(M)$ で表わすことにする．Γ から $\mathrm{Diff}(M)$ への準同型，すなわち，$\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ の元を M 上の (C^∞ 級，左)**Γ-作用**という．以下では，$\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ と $\gamma \in \Gamma$ に対して，$\rho(\gamma)$ を ρ^γ と書くこともある．すべての $\gamma \in \Gamma$ に対して ρ_n^γ が ρ^γ に C^∞-位相で収束するときに，$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \rho$ とすることで，$\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ に位相を入れる．

作用 $\rho_1 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ と C^∞ 級微分同相写像 $h : M_1 \to M_2$ が与えられたとき，

$$\rho_2^g = h \circ \rho_1^g \circ h^{-1} \tag{1}$$

によって，作用 $\rho_2 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ を定めることができるが，二つの作用 ρ_1, ρ_2 は本質的に同じものとみるのが自然であろう．そこで，作用 ρ_1, ρ_2 に対して (1) をみたす C^∞ 級微分同相写像 h が存在するとき，二つの作用は互いに **(C^∞-) 共役**であるといい，$\rho_1 \cong \rho_2$ で表わす．C^∞ 共役は $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ 上の同値関係を定め，M 上の Γ-作用 ρ_0 の C^∞-共役類は $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ 上の $\mathrm{Diff}(M)$-作用 $(h \cdot \rho)(\gamma) = h \circ \rho^\gamma \circ h^{-1}$ の ρ_0 の軌道と一致する．また，より弱い同値関係として，(1) をみたす h として C^r 級のものを取ることができるときに，ρ_1 と ρ_2 は **C^r-共役**であるという．

M が低次元の場合を中心に，$\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ がほぼ自明な作用しか含まない, すなわち，すべての $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ について，ρ の像 $\{\rho(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ が有限群になってしまうような組 (Γ, M) の存在が知られている ([5] を参考のこと．最近の著しい結果としては [2] がある)．このような強い大域剛性は活発な研究が続いている領域ではあるが，本項では ρ が faithful であるような非自明な作用の局所的な分類問題を考える．すなわち，

問題 1.1. $\rho_0 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ が与えられたとき，十分小さい ρ_0 の近傍 $\mathcal{U}$ について，$\mathcal{U}/\cong$ を記述せよ．

もっとも状況がよいのは，$\mathcal{U}$ を十分小さくとれば $\mathcal{U}/\cong$ が一点となる場合，すなわち，ρ_0 の近傍が ρ_0 の共役類含まれる場合である．このとき $\rho_0 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ は**局所剛性**を持つという．その次に状況がよい場合は，有限次元の変形空間を持つ場合，すなわち，$\mathcal{U}/\cong$ が有限次元空間になる場合であろう．この 20 年の間に，局所剛性，もしくは有限次元の変形空間を持つ

作用が数多く発見されている ([4] を参照のこと)．本稿では，そのような作用の典型的な例のいくつかについて，主に「作用と関連したコホモロジーの消滅」という観点から解説する．また最近筆者は，大域不動点を持つある可解群の作用の剛性をあるコホモロジーの消滅と結びつけることで証明したので，それについても解説したい．

2 剛性問題への双曲力学系の理論からのアプローチ

まず，群作用の剛性問題における古典的結果である，Ghys[8] と Katok-Spatzier[9] の結果を紹介する．どちらの結果においても，作用のもつ ‘Anosov 性’ が証明の鍵となる．

2.1 Ghys の剛性定理

$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ は一次分数変換によって，上半平面 $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ と，$S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に自然に作用する．Γ を $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の torsion を持たない一様格子とすると，$\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ は種数が 2 以上の向きづけ可能な閉曲面である．$\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ の連結成分で包含写像を含むものを $\tilde{\mathcal{T}}$ と置くと，$\tilde{\mathcal{T}}$ を ($\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ による) 共役で割ったものは $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ の Teichmüller 空間と同一視できる．

$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の S^1 への自然な作用を用いて，$\rho_\Gamma \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(S^1))$ を，$\rho_\Gamma^\gamma(x) = \gamma \cdot x$ で定める．また，$\theta \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ に対して，$\rho_\theta \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(S^1))$ を，$\rho_\theta^\gamma(x) = \theta(\gamma) \cdot x$ で定める．次の事実により，ρ_Γ は局所剛性を持たない．

命題 2.1. $\theta_1, \theta_2 \in \tilde{\mathcal{T}}$ について，これらが互いに C^∞-共役であることと，θ_1 と θ_2 が $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ によって共役であることは同値．

Ghys は ρ_Γ の摂動の C^∞-共役類全体が $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ の Teichmüller 空間でパラメータづけされることを示した．

定理 2.2 (Ghys [7, 8], Kononenko-Yue[10])**.** $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(S^1))$ が ρ_Γ に C^1 位相で十分近ければ，ある $\theta \in \tilde{\mathcal{T}}$ について ρ は ρ_θ と C^∞-共役.[1]

証明の最初のステップは，問題を $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 上のある葉層構造の剛性問題に帰着することである．$\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ 上の S^1-束 M_Γ と，その上のファイバーに横断的な葉層構造 $\mathcal{F}_\Gamma$ を

$$M_\Gamma = S^1 \times \mathbb{H}^2/(x,z) \sim (\rho_\Gamma^\gamma(x), \gamma \cdot z)$$
$$\mathcal{F}_\Gamma = \{[\{*\} \times \mathbb{H}^2]\}$$

[1] Ghys [8] では，より強く，ρ_Γ と「Euler 類」が等しい作用はすべてある ρ_θ と C^∞ 共役であることを証明している．

で定める．ρ_Γ に十分近い ρ に対して，$\mathcal{F}_\Gamma$ と同様の構成を行なうと，$\mathcal{F}_\Gamma$ に (平面場の意味で) 十分近い M_Γ 上の葉層 $\mathcal{F}$ が得られる．ρ と ρ_θ の共役に関する問題は，$\mathcal{F}$ の横断的射影構造の存在の問題に置きかえられる．

補題 2.3. $\mathcal{F}$ が横断的射影構造を持てば，ρ は S^1 上のある滑らかな射影構造を保つ．特に，ある $\theta \in \tilde{T}$ について，ρ は ρ_θ と C^∞ 共役になる．

P を $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の部分群で，下三角行列 (の類) 全体からなるものとする．$\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 上の P の右作用 $\hat{\rho}_\Gamma$ を $\hat{\rho}^p_\Gamma(\Gamma g) = \Gamma(gp)$ で定める．自然な同一視

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2) \simeq S^1 \times \mathbb{H}^2$$

によって，M_Γ は $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ と微分同相であり，$\mathcal{F}_\Gamma$ は $\hat{\rho}_\Gamma$ の軌道が定める葉層と同一視できる．

定理 2.2 の証明の次のステップは，$\mathcal{F}$ の横断的射影構造の存在をあるコホモロジーの消滅に帰着させることである．[2] $a^t \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ を対角成分が $e^{t/2}, e^{-t/2}$ である対角行列 (の類) として，$M_\Gamma = \Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 上の flow Φ^t_Γ を $\Phi^t_\Gamma(\Gamma g) = \Gamma(ga^t)$ で定める．また，N を対角成分が 1 である上三角行列全体のなす $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の部分群とし，$\mathcal{F}^s$ を N の $M_\Gamma = \Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ への自然な右作用の軌道葉層とする．$\mathcal{F}$ が $\mathcal{F}_\Gamma$ に十分近ければ，$\mathcal{F}^s$ は $\mathcal{F}$ と横断的に交わる．

ここで，Anosov 流の定義を思いだそう．Riemann 多様体 M 上の平衡点を持たないベクトル場 X_Φ で生成された flowΦ が **Anosov** であるとは，$D\Phi$-不変な TM の連続な分解 $TM = \mathbb{R}X \oplus E^s \oplus E^u$ と $T > 0$ で，

$$\sup_{x\in M}\{\|D\Phi^T|_{E^s(x)}\|, \|D\Phi^{-T}|_{E^u(x)}\|\} < 1$$

が成り立つようなものが存在することを言う．E^s, $\mathbb{R}X$ は一意積分可能であり，これらが生成する葉層構造を強安定葉層，弱不安定葉層という

M_Γ 上の Riemann 計量を $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の左不変計量から定める．Φ_Γ は Anosov 流であり，$\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}_\Gamma$ はその強安定葉層，弱不安定葉層となる．$\mathcal{F}$ が $\mathcal{F}_\Gamma$ に C^1 位相で十分近ければ，$\mathcal{F}$ を弱安定葉層に持つ Φ_Γ に近い Anosov 流 Φ が存在し，Anosov 流の位相安定性より，M_Γ 上の同相写像 H で $\mathcal{F}_\Gamma$ の各葉を $\mathcal{F}$ の葉に写すものを取ることができる．$\mathcal{F}$ を軌道葉層に持つ M_Γ 上の P の <u>連続な右作用</u>$\hat{\rho}$ を，$\hat{\rho}^p = H \circ \hat{\rho}^p \circ H^{-1}$ で定める．

各 $p \in P$ に対して，$l_p : [0,1] \to P$ を 1_P と p を結ぶ道を選び，$(p,x) \in P \times M_\Gamma$ に対して，$h_{p,x} : \mathcal{F}^s(x) \to \mathcal{F}^s(\hat{\rho}^p(x))$ を道 $t \mapsto \hat{\rho}^{l_p(t)}(x)$ に沿う $\mathcal{F}$ のホロノミーとする．P が単連結であることから，P の $C^\infty(M_\Gamma, \mathbb{R})$ への線型な <u>左作用</u>$\pi_{\mathcal{F}}$ を

$$(\pi^p_{\mathcal{F}}\psi)(x) = |Dh_{p,x}(x)|^2 \cdot \psi(h_{p,x}(x))$$

で定めることができる．[3]

[2] ここでは，Kononenko-Yue[10] のアイデアにもとづく方針を取った．
[3] この作用は $\mathcal{F}$ に横断的な 2 次微分の空間への作用と自然に同一視できる．

一般に位相線型空間 V にリー群 G の連続左作用 π があるとき，$\mathcal{E}_\pi^k = C^0(G^k, V)$ とし，$d^0 : \mathcal{E}_\pi^0 \to \mathcal{E}_\pi^1$, $d^1 : \mathcal{E}_\pi^1 \to \mathcal{E}_\pi^2$ を

$$(d^0\psi)(g) = \psi - g \cdot \psi,$$
$$(d^1\phi)(g, g') = \phi(g) + g \cdot \phi(g') - \phi(gg')$$

で定めると，$d^1 \circ d^0 = 0$ となり，**表現 π の第一コホモロジー群**

$$H^1(\pi) = \mathrm{Ker}(d^1)/\,\mathrm{Im}(d^0)$$

が定義される．

Riemann 計量によって $\mathcal{F}^s$ の各葉と $\mathbb{R}$ を同一視すると，1 次元写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の Schartz 微分

$$S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

を用いて， $\phi_S \in \mathcal{E}^1_{\pi_\mathcal{F}}$ を

$$\phi_S(p)(x) = S(h_{p,x})(x)$$

で定義できる．ϕ_S は $d^1\phi_S = 0$ をみたし，**Schwartzian cocycle** と呼ばれる．このとき，次の事実が知られている．

補題 2.4. $\phi_S = d^0\psi$ であるとき，ψ を「積分」することで $\mathcal{F}^s$ の各葉に沿う C^3 級射影構造で $\mathcal{F}$ のホロノミーで不変なものを定めることができる．

一方，a^t が定める Anosov 流 Φ_Γ が $\|D\Phi_\Gamma^t|_{E^s(x)}\| = \|D\Phi^{-t}|_{E^u(x)}\| = e^t$ をみたすことを用いて，次を示すことができる．

命題 2.5. $\mathcal{F}$ が $\mathcal{F}_\Gamma$ に C^1 位相で十分近ければ， $H^1(\pi_\mathcal{F}) = \{0\}$.

これらにより，$\mathcal{F}$ の C^3 級横断的射影構造が存在し，特に，ρ が ρ_θ と C^3 共役になることがわかる．3 次元 Anosov 流の剛性 (C^1 共役は自動的に C^∞ 共役になる) を用いると，この共役が実は C^∞ 級であることがわかり，証明が終わる．

2.2 Katok-Spatzier の局所剛性定理

$n \geq 2$ に対して，P を上三角行列 (の類) 全体からなる $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ の部分群とし，$M = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})/P$ とする．Γ を $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ の一様格子，ρ_Γ を Γ の M への自然な左作用とする．$n = 2$ のとき，自然な微分同相 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/P \simeq \mathbb{R}P^1 \simeq S^1$ を通して，この作用は前項で扱われた作用と共役である．

$n \geq 3$ のとき，次の節で見る Weil の剛性定理により，Γ は $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ の格子として非自明な変形をもたないので，ρ_Γ が局所剛性を持つことが期待できる．実際，それは Katok-Spatzier によって証明された．

定理 2.6 (Katok-Spatzier [9])．$n \geq 3$ のとき，ρ_Γ は局所剛性を持つ．

Katok-Spatzier [9] では，多くの場合の実階数 2 のリー群の一様格子についても，同様な作用が局所剛性を持つことを証明している．

定理 2.6 は，定理 2.2 と同様に，$M_\Gamma = \Gamma \backslash \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ 上の自然な P の右作用の軌道葉層 $\mathcal{F}_\Gamma$ の安定性に帰着される．A を正の対角成分を持つ対角行列 (の類) 全体からなる $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ の部分群とすると A は $\mathbb{R}^{n-2}$ と同型で，その自然な右作用は Anosov flow とよく似た性質を持つ 'Anosov 作用' となる．この事実により，$\mathcal{F}$ が $\mathcal{F}_\Gamma$ に十分近い葉層ならば，$\mathcal{F}_\Gamma$ の各葉を $\mathcal{F}$ の葉に写す同相写像 H が存在する．ここまでは，定理 2.2 の証明と同様であるが，定理 2.6 の証明では横断的な射影構造の存在を示すのではなく，$\mathcal{F}$ のホロノミーが**同時線形化可能**であることを用いる．[4] この部分の議論は多くの準備を必要とし，また複雑なので，本稿では省略する．

3 群作用の剛性問題への変形理論的なアプローチ

Ghys の剛性定理の証明では，横断的な射影構造を通じてコホモロジーの消滅が作用の剛性と関連づけられていた．本節では，群作用の剛性への変形理論的アプローチの雛形である，離散群 Γ から (有限次元) リー群への準同型に関する Weil の局所剛性定理と，Weil の方法を Γ から $\mathrm{Diff}(M)$ への準同型に適用することで変形複体のコホモロジーの消滅と作用の剛性を結びつけた Fisher の局所剛性定理を紹介する．

3.1 Weil の局所剛性定理

Γ を有限表示離散群，G を (有限次元) リー群とする．$\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ で Γ から G への準同型全体を表わすものとする．$\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ の位相を，ρ_n が ρ に収束するとは，すべての $\gamma \in \Gamma$ について $\rho_n(\gamma)$ が $\rho(\gamma)$ に収束することとして定める．$\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ と $g \in G$ に対して，準同型 $g_*\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ を $(g_*\rho)(\gamma) = g \cdot \rho(\gamma) \cdot g^{-1}$ で定める．また，$\rho, \rho' \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ について，$\rho' = g_*\rho$ となる $g \in G$ が存在するとき，ρ' は ρ に共役であるという．

まず，ρ_0 の無限小変形のなす空間をコホモロジーの言葉で記述しよう．$\mathcal{M}_0 = G$ とし，$k \geq 1$ に対して，$\mathcal{M}^k = \{c : \Gamma^k \to G\}$ と置く．$D^k : \mathcal{M}^k \to \mathcal{M}^{k+1}$ を

$$(D^0 g)(\gamma) = g \cdot \rho_0(\gamma) \cdot g^{-1}$$
$$(D^1 c)(\gamma, \gamma') = c(\gamma) \cdot c(\gamma') \cdot c(\gamma \cdot \gamma')^{-1}$$

[4] 一般の実階数 2 以上のリー群に対しては，高次の項を持つ「normal form」を考える必要がある．

で定める．$c \in \mathcal{M}_1$ が $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ の元であることと，$D^1 c = 0$ であることが同値であり，このとき c が ρ_0 と共役であることは，c が $\mathrm{Im}\, D^0$ に属することと同値である．

簡単な計算から，$\mathfrak{g}$ を G のリー環としたとき，G の随伴表現を Ad とすると，線型表現 $\mathrm{Ad} \circ \rho_0 \in \mathrm{Hom}(\Gamma, GL(\mathfrak{g}))$ の第一コホモロジー群 $H^1(\mathrm{Ad} \circ \rho_0)$ を定義するのに用いる d^0, d^1 は，それぞれ D^0, D^1 の 1_G, ρ_0 における微分と一致する．したがって，$H^1(\mathrm{Ad} \circ \rho_0) = \mathrm{Ker}\, d^1 / \mathrm{Im}\, d^0$ を ρ_0 の無限小変形のなす空間とみなすことができる．

定理 3.1 (Weil, [13])**.** $H^1(\mathrm{Ad} \circ \rho_0) = \{0\}$ であるとき，ρ_0 の近傍 $\mathcal{U} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ で，任意の $\rho \in \mathcal{U}$ が ρ_0 と共役となるようなものが存在する．

証明は，有限次元多様体の間の写像の問題に置き換えることで行う．まず，Γ は有限生成なので，その生成元 $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$, 関係 $R_1, \cdots, R_m$ を一組選ぶ．$\mathcal{E}^0 = G$, $\mathcal{E}^1 = G^k$, $\mathcal{E}^2 = G^m$ とし，$\Phi_k : \mathcal{E}^k \to \mathcal{E}^{k+1}$ を

$$\Phi_0(g) = (g \cdot \rho_0(\gamma_1) \cdot g^{-1}, \ldots, g \cdot \rho_0(\gamma_k) \cdot g^{-1})$$
$$\Phi_1(g_1, \ldots, g_k) = (R_1(g_1, \ldots, g_k), \ldots, R_m(g_1, \ldots, g_k))$$

で定める．さらに，$\Theta : \mathrm{Hom}(\Gamma, G) \to \mathcal{E}^1$ を $\Theta(\rho) = (\rho(\gamma_1), \ldots, \rho(\gamma_k))$ で定めると，

- Θ は $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ から $(\Phi_1)^{-1}(1_G, \ldots, 1_G)$ への同相写像,
- $\Theta(\{g_* \rho_0 \mid g \in G\}) = \mathrm{Im}\, \Phi_0$

が容易にわかる．これらにより， ρ_0 の局所剛性は次の条件は同値である：

$(\rho(\gamma_1), \ldots, \rho(\gamma_k))$ の近傍 $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}^1$ で,

$$\mathcal{U} \cap (\Phi_1)^{-1}(1_G, \ldots, 1_G) = \mathcal{U} \cap \mathrm{Im}\, \Phi_0$$

となるものが存在する．

一方，簡単な計算から

$$H^1(\mathrm{Ad} \circ \rho_0) \cong \mathrm{Ker}(D\Phi_1)_{(\rho_0(\gamma_1), \ldots, \rho_0(\gamma_k))} / \mathrm{Im}(D\Phi_0)_{1_G}$$

であることがわかるので，以下の陰関数定理から Weil の局所剛性定理が導かれる．

命題 3.2 ([13])**.** M_0, M_1, M_2 を多様体，$\Psi_i : M_i \to M_{i+1}$ $(i = 0, 1)$ を C^∞ 写像とする．$x_0 \in M_0$, $x_1 = \Psi_0(x_0)$, $x_2 = \Psi_1(x_1) = \Psi_1 \circ \Psi_0(x_0)$ に対して，

1. $\Psi_1 \circ \Psi_0 \equiv x_2$,
2. $\mathrm{Ker}(D\Psi_1)_{x_1} = \mathrm{Im}(D\Psi_0)_{x_0}$

が成り立つとする．このとき，x_0 の近傍 $U_0 \subset M_0$ と x_1 の近傍 $U_1 \subset M_1$ が存在し，$U_1 \cap \Psi_1^{-1}(x_2) = \Psi_0(U_0)$.

$H^1(\mathrm{Ad} \circ \rho_0)$ は多くの重要な例に対して計算可能で，Weil 自身による以下の結果がある．

定理 3.3 ([12])**.** G をコンパクト成分をもたない連結半単純リー群で，そのリー環の単純成分に $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ をもたないものとする．Γ を G の一様格子，$\iota : \Gamma \to G$ を包含写像とすると，$H^1(\mathrm{Ad} \circ \iota) = \{0\}$. 特に，準同型 ι は定理 3.1 の意味での局所剛性を持つ．

3.2 Fisher の局所剛性定理

論文 [6] において，Fisher は Weil の局所剛性定理における G を無限次元リー群 $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ に置き換えることで，コホモロジーの消滅から群作用の局所剛性を導いた．

Γ を有限表示離散群，M を閉多様体とする．M 上の C^∞ 級ベクトル場全体を $\mathfrak{X}(M)$ で表わすことにする．$\mathrm{Diff}^\infty(M)$ には Fréchet 多様体の構造が自然に入り，$\mathfrak{X}(M)$ は $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ の恒等写像 Id_M の接空間，すなわち，$\mathrm{Diff}^\infty(M)$ のリー環と見なすことができる．このとき，$h \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$ に対して，随伴写像 $\mathrm{Ad}_h : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ にあたるのは，

$$h_* : X \mapsto (x \mapsto Dh_{h^{-1}(x)} X(h^{-1}(x)))$$

である．そこで，作用 $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}^\infty(M))$ に対して，Γ の $\mathfrak{X}$ への表現 π_ρ を $\pi_\rho(\gamma)(X) = \rho_*^\gamma(X)$ で定めると，$\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ のときと同様にして，表現 π_ρ の第一コホモロジー群 $H^1(\pi_\rho)$ を ρ の無限小変形全体のなす空間とみなすことができる．

定理 3.4 (Fisher, [6])**.** 作用 $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}^\infty(M))$ が M のある *Riemann* 計量を保つとする．このとき，$H^1(\pi_\rho) = \{0\}$ ならば，ρ は局所剛性を持つ．

簡単ではないが，実際に $H^1(\pi_\rho)$ の消滅を示すことができる場合もある．

命題 3.5 ([6, 11])**.** Γ を property (T) をみたす有限表示群，または，実階数が 2 以上の半単純リー群の既約な格子とする．$\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}^\infty(M))$ が M のある Riemann 計量を保つとき，$H^1(\pi_\rho) = \{0\}$.

定理 3.4 の証明の方針は Weil の局所剛性定理 3.1 と同じである．しかし，この場合には Fréchet 空間の間の写像においての命題 3.2 の対応物である Hamilton の陰関数定理を用いることになり，$H^1(\pi_\rho)$ の消滅のみから直接に定理を導くことはできない．実際，定理 3.4 は $H^1(\pi_\rho)$ の消滅よりも強い，列 $\mathcal{E}^0_{\pi_\rho} \xrightarrow{d^0} \mathcal{E}^1_{\pi_\rho} \xrightarrow{d^1} \mathcal{E}^2_{\pi_\rho}$ のよい分裂を仮定する次の剛性定理と，$H^1(\pi_\rho) = \{0\}$ であるような等長的な作用がこの仮定をみたすことを示すことで得られる．

定理 3.6 ([6, 11])．$\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(M))$ に対して，$\mathcal{E}^i_{\pi_\rho}$ を Γ^i から $\mathfrak{X}(M)$ への写像全体とし，$\|\cdot\|_k$ を $\mathcal{E}^i_{\pi_\rho}$ 上の C^k-ノルムとする．また，$d^i : \mathcal{E}^i_{\pi_\rho} \to \mathcal{E}^{i+1}_{\pi_\rho}$ を $H^1(\pi_\rho)$ の定義に出てくるものとする．次をみたす線型写像 $L^0 : \mathcal{E}^1_{\pi_\rho} \to \mathcal{E}^0_{\pi_\rho}$, $L^1 : \mathcal{E}^2_{\pi_\rho} \to \mathcal{E}^1_{\pi_\rho}$ が存在するとき，ρ は局所剛性を持つ．

- L^0, L^1 は **tame**．すなわち，数列 $(C_r)_{r \geq 0}$ と $r_0 \geq 0$ で，すべての $r \geq 0$, $v \in \mathcal{E}^{i+1}$ について $\|L^i v\|_r \leq C_r \cdot \|v\|_{r+r_0}$ をみたすものが存在する．

- $d^0 \circ L^0 + L^1 \circ d^1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}^1}$．

上の条件をみたすとき，列 $\mathcal{E}^0_{\pi_\rho} \xrightarrow{d^0} \mathcal{E}^1_{\pi_\rho} \xrightarrow{d^1} \mathcal{E}^2_{\pi_\rho}$ が '**tame splitting** を持つ' という．

ρ がある Riemann 計量を保つときに定理 3.6 の仮定をみたすことの証明は，$\{\rho^\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ の閉包 G_Γ がコンパクトリー群になり，その $\mathcal{E}^i_{\pi_\rho}$ の L^2 閉包への作用の既約分解の各成分が有限次元であることを用いて行われる．

4 大域不動点を持つ可解群の作用の変形

本節では，ある可解群の作用の剛性に関する筆者が最近得た結果を紹介する．ここでも剛性の証明には変形理論的なアプローチが用いられるが，作用の大域不動点の存在とその周りでのふるまいから，ある有限次元複体のコホモロジーの消滅を示せば十分となる．

$n \geq 1$ と $k \geq 2$ を固定し，有限表示群 $\Gamma_{n,k}$ を

$$\Gamma_{n,k} = \langle a, b_1, \ldots, b_n \mid a b_i a^{-1} = b_i^k,\ b_i b_j = b_j b_i\ (i, j = 1, \ldots, n) \rangle$$

で定める．$\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ に対して作用 $\check{\rho}_{\underline{v}} \in \mathrm{Hom}(\Gamma_{n,k}, \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n))$ を，

$$\check{\rho}^a_{\underline{v}}(x) = kx,$$
$$\check{\rho}^{b_i}_{\underline{v}}(x) = x + b_i$$

で定めると，立体射影による同一視 $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ により，$\check{\rho}_{\underline{v}}$ は ∞ を大域不動点に持つ S^n 上の作用 $\rho_{\underline{v}}$ に拡張できる．ここで，作用 $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Diff}(N))$ の**大域不動点**とは，すべての $\gamma \in \Gamma$ について $\rho^\gamma(x) = x$ となるような $x \in M$ をいう．

$n = 1$ のとき，$\Gamma_{1,k}$ は幾何群論における重要な例のひとつである Baumslag-Solitar 群 $BS(1,k)$ である．Burslem-Wilkinson は次の $\Gamma_{1,k}$-作用の剛性定理を証明した．

定理 4.1 (Burslem-Wilkinson [3])．S^1 上の実解析的な $\Gamma_{1,k}$-作用はすべて局所剛性を持つ．特に，$n = 1$, $v \neq 0$ のとき，$\rho_{\underline{v}}$ は局所剛性を持つ．

一方，$n \geq 2$ のときは，$\rho_{\underline{v}}$ は局所剛性を持たないことを示すのはそれほど困難ではない．

命題 4.2 ([1])**.** *$\underline{v}$, $\underline{w}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とする．このとき，次の二つの条件は同値：*

1. *$\rho_{\underline{v}}$ と $\rho_{\underline{w}}$ が互いに C^∞-共役.*
2. *$\underline{w} = \underline{v} \cdot cP$ となる $c > 0$, $P \in O(n)$ が存在.*

しかし，Ghys の剛性定理 2.2 における ρ_Γ がそうであったように，$\rho_{\underline{v}}$ の近傍に現れる作用も有限次元のパラメータを持つ族によって完全に記述される．

定理 4.3 (A. [1])**.** *$\underline{v}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とする．$\mathrm{Hom}(\Gamma_{n,k}, \mathrm{Diff}(S^n))$ における $\rho_{\underline{v}}$ の近傍 $\mathcal{U}$ で次をみたすものが存在する：すべての $\rho \in \mathcal{U}$ に対して，それが $\rho_{\underline{w}}$ と C^∞-共役となるような $\mathbb{R}^n$ の基底 $\underline{w} = \underline{w}(\rho)$ が存在する．さらに，$\underline{w}$ は ρ に連続に依存するように取れる．*

ρ を $\rho_{\underline{v}}$ に十分近い作用としたとき，ある $\underline{w}$ に対して ρ が $\rho_{\underline{w}}$ と共役となることの証明は，四つのステップからなる：

1. 大域的不動点 p_∞ の存在を示す．
2. $(D\rho^{b_i})_{p_\infty} = I$ $(i = 1, \ldots, n)$, $(D\rho^a)_{p_\infty} = (1/k)I$ を示す．
3. $\mathbb{R}^n$ の基底 $\underline{w}$ と局所微分同相写像 $h : (S^n, p_\infty) \to (S^n, \infty)$ で，$h \circ \rho^\gamma = \rho^\gamma_{\underline{w}} \circ h$ となるものが存在することを示す．
4. h が $\rho_{\underline{w}}$ と ρ の間の S^2 全体の上の共役に拡張されることを示す．

証明の核心部であるステップ 3 は以下の方針で証明される．まず，ステップ 2 の $(D\rho^a)_{p_\infty} = (1/k)I$ から，ρ^a は p_∞ で線型化可能．すなわち，$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $F(x) = (1/k)x$ で定めたとき，局所微分同相写像 $\phi : (S^n, p_\infty) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ で $\phi \circ \rho^a \circ \phi^{-1}(x) = F(x)$ となるものが存在する．$\mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$ を 0 を不動点に持つ $\mathbb{R}^n$ の局所微分同相写像の芽全体とし，$G_i \in \mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$ を $G_i = \phi \circ \rho^{b_i} \circ \phi^{-1}$ で定める．一方，$\bar{\phi}(x) = (1/\|x\|^2) \cdot x$ と置くと，すべての $\underline{w} \in (\mathbb{R}^n)^n$ について，$\bar{\phi} \circ \rho^a_{\underline{v}} \circ \bar{\phi}^{-1} = F$．従って，$w \in \mathbb{R}^n$ に対して $\bar{g}_w \in \mathrm{Diff}(S^n)$ を $\bar{g}_w(x) = x + w$ で定め，$\bar{G}_w = \bar{\phi} \circ \bar{g}_w \circ \bar{\phi}^{-1}$ と置くと，ステップ 3 は次の命題に帰着される．

命題 4.4. *$G_1, \ldots, G_n \in \mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$ が*

$$F \circ G_i = G_i^k \circ F, \quad G_i \circ G_j = G_j \circ G_i \quad ({}^\forall i, j = 1, \ldots, n)$$

をみたし，かつ，各 G_i が $\bar{G}_{v_i}$ に (0 での 2 次の展開の意味で) 十分近いとき，$A \in GL(n, \mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^n$ の基底 $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ で，

$$G_i = A^{-1} \circ \bar{G}_{w_i} \circ A \quad ({}^\forall i = 1, \ldots, n)$$

となるものが存在する．(このとき，$h = \bar{\phi}^{-1} \circ A \circ \phi$ と置けば，$h \circ \rho^\gamma = \rho_{\underline{w}} \circ h$ が 0 の近傍で成り立つ)

命題の証明は Weil の陰関数定理 (命題 3.2) を用いて行われる．$\mathcal{H}^{(d)}$ で $\mathbb{R}^n$ からそれ自身への次数 d の homogeneous な多項式写像全体を表わし，$\pi^{(d)}: \mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0) \to \mathcal{H}^{(d)}$ を Taylor 展開の d 次の項を与える写像とする．また，$\mathcal{D}$ を $\mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$ の元 G で $F \circ G = G^k \circ F$ をみたすもの全体とすると次が成り立つ．

補題 4.5. $G, G' \in \mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$ について，$\pi^{(2)}(G) = \pi^{(2)}(G')$ ならば，$G = G'$．特に，$\pi^{(2)}: \mathcal{D} \to \mathcal{H}^{(2)}$ は全単射．

$\pi^{(2)}$ による同一視により，$\mathcal{D}$ には自然に位相が入る．

$\mathcal{M}_0 = GL(n, \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^n)^n$, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{D}^n \simeq (\mathcal{H}^{(2)})^n$, $\mathcal{M}_2 = (\mathcal{H}^{(3)})^{\frac{n(n-1)}{2}}$ と置き，$D^0 : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1$, $D^1 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ を

$$\begin{aligned} D^0(A, w_1, \ldots, w_n) &= (A^{-1} \circ \bar{G}_{w_i} \circ A)_{i=1,\ldots,n} \\ D^1(G'_1, \ldots, G'_n) &= (\pi^{(3)}(G'_i \circ G'_j - G'_j \circ G'_i))_{1 \le i < j \le n} \end{aligned}$$

で定める．$\rho^{b_i}_{\underline{w}}$ たちの可換性から，$D^1 \circ D^0 = 0$．また，G_i たちの可換性の仮定から，G_i たちは $D^1(G_1, \ldots, G_n) = 0$ をみたす．d^0, d^1 をそれぞれ D^0,D^0 の $x_0 = (\mathrm{Id}, v_1, \ldots, v_n)$, $x_1 = D^0(x_0) = (\bar{G}_{v_1}, \ldots, \bar{G}_{v_n})$ における微分とすると，同一視 $\mathcal{D} \simeq (\mathcal{H}^{(2)})^n$ の元での具体的な計算により，次の「コホモロジーの消滅」が示される．

補題 4.6. $\mathrm{Ker}\, d^1 = \mathrm{Im}\, d^0$.

Weil の陰関数定理より，$(G_1, \ldots, G_n)$ の近傍で $(D^1)^{-1}(0)$ は D^0 の像と一致し，命題 4.4，従って，ステップ 3 の証明が完了する．

参考文献

[1] M.Asaoka, Local rigidity of certain solvable actions on the spheres. in preparation.

[2] M.R.Bridson and K.Vogtmann, Actions of automorphism groups of free groups on homology spheres and acyclic manifolds. to appear in Commetarii. Math. Helv, arXiv:0803.2062.

[3] L.Burslem and A.Wilkinson, Global rigidity of solvable group actions on S^1. Geom. Topol. 8 (2004), 877–924 (electronic).

[4] D.Fiser, Local Rigidity: Past, Present, Future. *Dynamics, Ergodic Theory and Geometry (Mathematical Sciences Research Institute Publications)*, 45–98, Cambridge University Press, 2007.

[5] D.Fisher, Groups acting on Manifolds: around the Zimmer program. *Geometry, rigidity, and group actions (Chicago Lectures in Mathematics Series)*, 72–157, Chicago University Press, 2011.

[6] D.Fisher, First cohomology and local rigidity of group actions. to appear in Ann. Math. (2). arXiv:0505520.

[7] É. Ghys, Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsiens. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 42 (1992), no. 1–2, 209–247.

[8] É. Ghys, Rigidité différentiable des groupes fuchsiens. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 78 (1993), 163–185.

[9] A.Katok and R.J.Spatzier, Differential rigidity of Anosov actions of higher rank abelian groups and algebraic lattice actions. Tr. Mat. Inst. Steklova 216 (1997), Din. Sist. i Smezhnye Vopr., 292-319; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 1997, no. 1 (216), 287–314.

[10] A.Kononenko and C.B.Yue, Cohomology and rigidity of Fuchsian groups. Israel J. Math. 97 (1997), 51–59.

[11] A.Lubotzky and R.J.Zimmer, Variants of Kazhdan's property for subgroups of semisimple groups. Israel J. Math. 66 (1989), no. 1–3, 289–299.

[12] A.Weil, On discrete subgroups of Lie groups, II. Ann. Math. (2) 75 (1962), 578–602.

[13] A.Weil, Remarks on the cohomology of groups. Ann. Math. (2) 80 (1964), 149–157.