有限グラフの非線形スペクトルギャップ

近藤 剛史
神戸大学大学院理学研究科

概 要

近年, 有限グラフに対する非線形スペクトルギャップと呼ばれる量が幾何学的群論, 距離空間の幾何学などのいくつかの文脈で現われ, それを評価することが重要になってきている. ここでは, この概念について簡単に説明し, それに関連したいくつかの結果の紹介および非線形スペクトルギャップが幾らでも小さくなる空間の例について説明する.

1 はじめに

非線形のスペクトルギャップを定義する前に, まず線形の (通常の) スペクトルギャップとは何かから始めよう.

有限集合 G と, 関数 $m : G \times G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって, $m(u,v) = m(v,u)$ を満たすもののペア (G,m) のことを重み付きグラフと言うことにする. この定義はあまり標準的ではないと思われるが, G 自身を頂点集合 V だと思い, $m(u,v) > 0$ となる 2 点が辺 $\{u,v\} \in E$ で結ばれていると思うことで, ループを許容する有限無向グラフ (V,E) が対応しているので, こう呼んでいる. また, 各点の重みを $m(u) := \sum_{v \in G} m(u,v)$ と定義しておく. 重み付きグラフに対して, その上の関数 $f : G \to \mathbb{R}$ に作用する組合せラプラシアンを

$$\Delta f(x) := f(x) - \sum_{y \in G} \frac{m(x,y)}{m(x)} f(y)$$

で定義すると, 組合せラプラシアンの固有値は必ず 0 を含み, $[0,2]$ 区間に入ることが知られている. 組合せラプラシアンの 0 でない最小の固有値を $\mu_1(G)$ と書き, これを重み付きグラフのスペクトルギャップという. $\mu_1(G)$ は次のようにも特徴付けることができることが知られている.

$$\mu_1(G) = \inf_{\phi : G \to \mathbb{R}} \frac{\sum_{\{u,v\} \in E} m(u,v) |\phi(u) - \phi(v)|^2}{\sum_{v \in V} m(v) |\phi(v) - \overline{\phi}|^2}.$$

ここで, ϕ は G 上の非定値関数全体を動き, $\overline{\phi}$ とは, 頂点の重みを測度だと思った時の ϕ による像測度の重心である.

2　非線形スペクトルギャップ

ここで非線形と言っているのは, ターゲットの空間をより一般の距離空間にしたものを考えるという意味である. 全ての距離空間に対するスペクトルギャップの概念も定義できるが, ここでは Wang が [11] で定義したものを扱いたいので, そのために CAT(0) 空間の概念を導入する.

定義 2.1 (CAT(0) 空間)**.** 完備な距離空間 (Y, d) が CAT(0) 空間であるとは, 次の二つの条件が成り立つことである.

1. Y の任意の 2 点は測地線, 即ち区間の等長埋め込みによって結ぶことができる.
2. 任意の三点 $x, y, z \in Y$ と $\gamma(0) = y, \gamma(1) = z$ を満たす任意の測地線 $\gamma : [0, 1] \to Y$ に対して,

$$d(x, \gamma(t))^2 \leq (1 - t)d(x, y)^2 + td(x, z)^2 - t(1 - t)d(y, z)^2.$$

が任意の $0 \leq t \leq 1$ で成立する.

一つ目の条件を満たす完備距離空間を測地空間と言う. 二つ目の条件の不等式は, ユークリッド平面の三角形に対しては等式となることに注意しておく. したがって, 標語的には, CAT(0) 空間とは任意の測地三角形がユークリッド平面の三角形と比べて太くないような測地空間と言うことができる.

Hilbert 空間が CAT(0) 空間の例であることは容易に分かるが, その他にも, tree, Hadamard 多様体 (つまり断面曲率が 0 以下の完備, 単連結なリーマン多様体), ユークリッド的ビルディングなどが CAT(0) 空間となることが知られている.

CAT(0) 空間 Y 上の, 台が有限の測度 $\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \delta_{x_i}$ の重心とは, Y 上の関数 $y \mapsto \sum_{i=1}^{n} \nu_i d(y, x_i)^2$ の唯一の最小点のこととし, $\overline{\nu}$ あるいは $c(\nu)$ と書く. 重心はより一般の測度に対しても定義できるが, ここでは必要ないので省略することにする. CAT(0) 空間について, 詳しくは [1] を参照されたい.

定義 2.2 (Wang の不変量)**.** 重み付きグラフ (G, m) と CAT(0) 空間 Y に対して Wang の不変量 $\lambda_1(G, Y)$ とは,

$$\lambda_1(G, Y) = \inf_{\phi: G \to Y} \frac{\sum_{\{u,v\} \in E} m(u, v) d_Y(\phi(u), \phi(v))^2}{\sum_{v \in V} m(v) d_Y(\phi(v), \overline{\phi})^2}$$

として定義される量である [11]. ただし, ϕ は G から Y への非定値写像全体を動き, $\overline{\phi}$ は頂点の重みを V 上の測度だと思った時の ϕ による像測度の重心のこととする.

また, $\lambda_1(G, Y)$ は, Poincaré タイプの不等式

$$\sum_{v \in V} m(v) d_Y(\phi(v), \overline{\phi})^2 \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{\{u,v\} \in E} m(u, v) d_Y(\phi(u), \phi(v))^2$$

が任意の写像 $\phi : G \to Y$ について成立するような λ の上限と言うこともできる.

定義から, $\mu_1(G) = \lambda_1(G, \mathbb{R})$ である. したがって, Wang の不変量 $\lambda_1(G, Y)$ はスペクトルギャップの非線形の (より正確には CAT(0) での) 類似物と思うことができるので, 非線形スペクトルギャップとも呼ばれる. 一般に

$$\lambda_1(G, Y) \leq \mu_1(G)$$

が成り立つことが容易に分かる.

この不変量は Wang が最初に考えたためこう呼ばれるが, Wang はターゲットとしてアダマール多様体しか考えていなかったので, 上の不等式で等式が成り立つ場合 (つまりターゲットは多様体に一般化されたがスペクトルギャップは線形の場合と一致する場合) であった.

一般の CAT(0) 空間では $\lambda_1(G, Y)$ が $\mu_1(G)$ よりも真に小さく成り得ることが認識され, 本質的に非線形な場合を扱ったものは, 井関, 納谷 [5] が始めてである. 彼らは $\lambda_1(G, Y)$ を用いて次の CAT(0) 空間への群の等長作用に対する固定点定理を示した.

定理 2.3. [5] 有限生成群 Γ が重み付き単体複体 (X, m_X) に幾何学的かつ重みを保つように作用しているとし, Y を CAT(0) 空間とする. 任意の頂点 $x \in X$ に対して $\lambda_1(Lk_x, Y) > \frac{1}{2}$ が成り立つならば, Γ の Y への任意の等長作用は固定点を持つ.

この定理を拡張, 応用することにより, 様々なランダム群が非常に強い固定点性質を持つことがわかっている ([3, 4]).

3　一様埋め込み

スペクトルギャップの距離空間の幾何学との関係の一つとして, エクスパンダーの一様埋め込みの非存在を紹介しよう.

距離空間の列 $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ から距離空間 (Y, d_Y) への写像の列 $f_n : X_n \to Y$ が一様埋め込みであるとは, 二つの単調増加関数 $\alpha, \beta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が存在して, $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$ を満たしており, 全ての $n \in \mathbb{N}$ と $x, y \in X_n$ に対して

$$\alpha(d_{X_n}(x, y)) \leq d_Y(f_n(x), f_n(y)) \leq \beta(d_{X_n}(x, y))$$

が成り立つこととする.

命題 3.1. [7] 有限正則グラフの列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, V_n 上の組合せ距離を ρ_n として距離空間とみなす. Y を $\inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda_1(G_n, Y) > 0$ を満たす CAT(0) 空間とする. このとき, (G_n, ρ_n) は Y への一様埋め込みを持たない.

有限正則グラフの列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(G_n) > 0$ を満たす時にエクスパンダーと呼ばれ, これがヒルベルト空間に一様埋め込みを持たないことは Gromov が指摘しているが, この拡張になっている.

4 スペクトルギャップの評価

線形の場合, $\mu_1(G)$ は有限次元空間の上の線形写像の固有値なので, 直接計算することで求めることができる. また Y がヒルベルト空間の時も $\lambda_1(G,Y)=\mu_1(G)$ となることが容易に分かる.

しかし, Y が一般の CAT(0) 空間になると, その評価はとたんに難しくなる. $\lambda_1(G,Y)$ を下から評価するため, 井関, 納谷は CAT(0) 空間の不変量 $\delta \in [0,1]$ を導入し,

$$(1-\delta(Y))\mu_1(G) \leq \lambda_1(G,Y) \leq \mu_1(G)$$

となることを示した. つまり, $\delta(Y)$ は通常のスペクトルギャップと Y をターゲットとする非線形のスペクトルギャップがどのくらい違うのかを測っているものと思うことができる.

ここで自然に次のような問題が生まれる.

1. 与えられた CAT(0) 空間 Y に対して, その井関納谷不変量の値 $\delta(Y)$ を求めよ, あるいは上から評価せよ.
2. $\delta(Y)=1$ を満たす CAT(0) 空間 Y は存在するのか (c.f. [6]).

最初の問については, ヒルベルト空間, アダマール多様体, tree に対しては $\delta=0$ となることが知られており, 素数 p に対して, $PGL(3,\mathbb{Q}_p)$ に付随する Bruhat-Tits ビルディング I_p に対して, $\delta(I_p) \leq \frac{3}{4}$ が分かっている. $p=2$ の時にはより良い評価

$$\delta(I_2) \leq \frac{37-18\sqrt{2}}{28} = 0.4122\ldots.$$

が得られている. また, 豊田は [10] において CAT(0) 空間の δ が 1 未満になるための十分条件を考察し, ココンパクトな離散群の作用をもつ空間の δ が 1 未満であることを示している. このことから, 任意の半単純代数群に付随する Bruhat-Tits ビルディングは δ が 1 未満であることが分かる. ただし, 全ての Bruhat-Tits ビルディングの族を考えた時に, これらの δ の上限が 1 未満かどうかは, 現在の所, 未解決である. もしもこれが 1 未満であれば, グラフモデルのランダム群は非線形であることがしたがうが, 非常に難しい問題だと思われる. δ の評価についての他の研究としては, [9, 2] がある.

二つ目の問に関しては, 存在することが分かった.

定理 4.1. [7] $\delta(Y_0)=1$ を満たす CAT(0) 空間 Y_0 は存在する.

構成は単純で, girth が発散するようなエクスパンダーのスケールを変えて, その上の錐を考えるというものである. しかし, このことはポアンカレの不等式が成立しないような CAT(0) 空間が存在することを示している.

また, これと同様の構成を用いると, 他にも距離空間として顕著な性質を持つ CAT(0) 空間を作ることができる.

定理 4.2. [7] 全ての実数 $p > 1$ に対してマルコフタイプ p を持たない CAT(0) 空間が存在する.

これは全ての CAT(0) 空間はマルコフタイプ 2 を持つかという, Naor, Peres, Schramm, Sheffield による問 ([8], P193 (7)) に対する答を与える. この空間は, 上の構成における girth が発散するようなエクスパンダーの代わりに, girth が発散してかつ diam/girth が有界であるようなグラフの列を考えることによって得られる.

また, 非線形のスペクトルギャップは測度の集中現象とも関わることが分かって来ている [7].

参考文献

[1] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric Spaces of Non-positive Curvature, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.

[2] K. Fujiwara, T. Toyoda, Random groups have fixed points on CAT(0) cube complexes, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[3] H. Izeki, T. Kondo, S. Nayatani, Fixed-point property of random groups, Ann. Global Anal. Geom. 35 (2009), no. 4, 363–379.

[4] H. Izeki, T. Kondo, S. Nayatani, N-step energy of maps and fixed-point property of random groups, to appear in Groups, Geometry, and Dynamics.

[5] H. Izeki, S. Nayatani, Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces, Geometriae Dedicata 114 (2005), 147–188.

[6] T. Kondo, Fixed-point theorems for random groups, Probabilistic Approach to Geometry, 263–272, Adv. Stud. Pure Math., 57, Math. Soc. Japan, 2010.

[7] T. Kondo, CAT(0) spaces and expanders, to appear in Math. Zeit.

[8] A. Naor, Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield, Markov chains in smooth Banach spaces and Gromov-hyperbolic metric spaces. Duke Math. J. 134 (2006), no. 1, 165–197.

[9] T. Toyoda, CAT(0) spaces on which a certain type of singularity is bounded. Kodai Math. J. 33 (2010), no. 3, 398-415.

[10] T. Toyoda, Fixed point property for a CAT(0) space which admits a proper cocompact group action, preprint.

[11] M-T. Wang, Generalized harmonic maps and representations of discrete groups. Comm. Anal. Geom. 8 (2000), no. 3, 545–563.